Über die Tragkraft der Magnete.

Von dem w. M. **J. Stefan.**

Bei der Berechnung der Tragkraft eines Magnetes wird man im Allgemeinen dreierlei Kräfte zu unterscheiden haben.

1. Die Anziehung der entgegengesetzten magnetischen Massen auf den Flächen, in welchen sich der Magnet und der Anker unmittelbar berühren.

2. Die Fernwirkungen, welche die Massen der Contactflächen von den freien magnetischen Massen des Magnetes und des Ankers erleiden.

3. Die Fernwirkungen, welche die freien magnetischen Massen des Magnetes auf jene des Ankers ausüben.

Damit diese Kräfte berechnet werden können, muss die Vertheilung des Magnetismus im Magnete und im Anker bekannt sein. Diese Vertheilung lässt sich jedoch nur in wenigen Fällen angeben. Zwei solche Fälle werden in der vorliegenden Abhandlung ausführlicher betrachtet, im ersten bilden Magnet und Anker zusammen einen Ringmagnet, im zweiten eine gleichförmig magnetisirte Kugel.

Der erste Fall ist sehr leicht zu behandeln. Ein Ringmagnet ist dadurch charakterisirt, dass in ihm keine freien magnetischen Massen vorhanden sind. Schneidet man den Ring durch eine Ebene in zwei Theile, in den Magnet und in den Anker, so ist die Tragkraft dieses Systems durch die Anziehung der Massen, welche auf den Contactflächen einander gegenüber stehen, vollständig bestimmt.

An diesen Fall knüpft sich die Lösung von drei Aufgaben. Die erste betrifft die Berechnung des erreichbaren Maximums der Tragkraft eines solchen Magnetes. Die zweite bezieht sich auf die Darstellung des Zusammenhanges zwischen der Tragkraft und der Intensität des Stromes, welcher den Ring magnetisirt. Die

dritte Aufgabe bildet die Bestimmung der Abhängigkeit der Tragkraft von der Lage der Ebene, welche den Ring in Magnet und Anker scheidet.

Der zweite Fall, in welchem Magnet und Anker zusammen eine gleichförmig magnetisirte Kugel bilden, ist complicirter. Es sind bei der Berechnung der Tragkraft alle drei Arten der oben aufgezählten Kräfte zu berücksichtigen. Dieser Fall ist besonders geeignet, den grossen Einfluss, welchen die Fernwirkungen auf die Tragkraft eines Systems nehmen können, zu zeigen.

I.

Wenn man einen ringförmigen Eisenkern mit einem Leitungsdraht vollständig umwickelt, so dass die Drahtwindungen ebenfalls einen geschlossenen Ring darstellen und durch den Leitungsdraht einen elektrischen Strom schickt, so verwandelt sich der Eisenring in einen Ringmagnet. Die Vertheilung des Magnetismus in demselben lässt sich aus der Theorie der magnetischen Induction bestimmen und ist diese Bestimmung von Kirchhoff ausgeführt worden.[1]

Die magnetisirende Wirkung jeder Windung der Spirale kann man der eines geschlossenen Stromes, welcher in einer die Ringaxe enthaltenden Ebene liegt, gleich annehmen. Es ergibt sich dann, dass die magnetisirende Kraft der ganzen Spirale in jedem Punkte des Eisenkernes nach der Tangente des Kreises gerichtet ist, welchen man mit dem Abstande dieses Punktes von der Ringaxe als Radius beschreiben kann. In allen Punkten eines solchen Kreises hat die magnetisirende Kraft einen und denselben Werth.

Denkt man sich den Eisenkern in kreisförmige Fäden von unendlich kleinem Querschnitte zerlegt, so fällt in jedem Elemente eines solchen Fadens die Richtung der Magnetisirung mit der des Elementes zusammen, die Intensität der Magnetisirung oder das auf die Volumseinheit reducirte magnetische Moment hat für alle Elemente des Fadens dieselbe Grösse.

---

[1] Pogg. Ann. Ergänzungsband V. I.

Ein solcher Faden zeigt an keiner Stelle, weder an seiner Oberfläche noch in seinem Inneren freien Magnetismus und diese Eigenschaft kommt demnach auch dem ganzen Ringmagnete zu.

Diese Eigenschaft eines Ringmagnetes hat zur Folge, dass bei seiner Magnetisirung der äusseren magnetisirenden Kraft nur die von der Natur des Eisens abhängigen gewöhnlichen, wie auch magnetischen Molekularkräfte und nicht auch, wie dies bei anderen Formen der Magnete der Fall ist, die frei auftretenden magnetischen Massen entgegenwirken. Es eignen sich desshalb die mit ringförmigen Eisenkernen angestellten Versuche am besten, um über das Verhalten des Eisens bei der Magnetisirung Aufschluss zu erhalten. Die Art, wie solche Versuche auszuführen und zu berechnen sind, hat Kirchhoff in der citirten Abhandlung ebenfalls erklärt.

Der Umstand, dass bei der Bildung eines Ringmagnetes keine frei auftretenden magnetischen Massen der Magnetisirung entgegenwirken, hat ferner noch zur Folge, dass bei derselben äusseren magnetisirenden Kraft in einem Ringmagnete ein höherer Grad der Magnetisirung erreicht wird, als in einem Magnete von einer anderen Form, und dass man aus demselben Grunde auch dem Maximum der Magnetisirung in einem Ringmagnete schon mit viel schwächeren Kräften nahe kommt, als in Magneten von anderer Gestalt.

Die magnetisirende Kraft der Stromspirale hat wohl in allen Punkten eines Ringfadens denselben Werth, dieser ist jedoch nicht für alle Fäden gleich, er ist für die von der Ringaxe weiter entfernten Fäden kleiner und zwar in jedem Faden dem Radius desselben verkehrt proportional. Ein Ringmagnet ist also im Allgemeinen nicht nach dem ganzen Querschnitte gleichförmig magnetisirt, sondern am inneren Rande stärker als am äusseren. Diese Verschiedenheit der Magnetisirung fällt natürlich weg, wenn die magnetisirende Kraft so weit gesteigert wird, dass auch in den äusseren Fäden die Magnetisirung dem erreichbaren Maximum unendlich nahe kommt.

Wenn die radialen Dimensionen des Querschnittes des Ringkörpers klein sind gegen den mittleren Radius des Ringes, so wird auch bei schwächeren magnetisirenden Kräften die Magne-

tisirung der inneren und äusseren Fäden des Ringes nicht viel verschieden sein und dieselbe in erster Annäherung als constant angenommen werden dürfen.

II.

Der Ringmagnet werde durch eine die Axe des Ringes enthaltende Ebene in zwei Halbringe zerschnitten und der eine Theil als Magnet, der andere als Anker betrachtet. Die sich berührenden Endflächen des Magnetes und des Ankers sind mit entgegengesetzten magnetischen Massen belegt, an dem einen Contacte der Magnet etwa mit positiver, der Anker mit negativer Masse, an dem anderen Contacte in umgekehrter Art.

Wird die Magnetisirung in allen Ringfäden als gleich gross angenommen, so sind die Massen auf den Contactflächen in gleichförmiger Dichte verbreitet. Diese Dichte soll mit σ bezeichnet werden.

Eine ebene Fläche, welche gleichförmig mit Masse belegt ist, übt auf die Masseneinheit in irgend einem Punkte eine Kraft aus, von der die zur Ebene senkrechte Componente durch einen einfachen Ausdruck gegeben ist. Dieselbe ist nämlich gleich der Dichte σ multiplicirt mit dem Gesichtswinkel, unter welchem die Fläche von dem afficirten Punkte aus erscheint. Liegt der Punkt unendlich nahe vor der Fläche, so umfasst der Gesichtswinkel eine Halbkugel und hat 2π zu seinem Maasse. Die von der Fläche auf den Punkt ausgeübte Kraft ist demnach durch $2\pi\sigma$ bestimmt.

Man erhält nun die Kraft, mit welcher die Belegung der Magnetfläche jene der Ankerfläche anzieht, wenn man $2\pi\sigma$ mit der auf der Ankerfläche vorhandenen Masse, also mit $q\sigma$ multiplicirt, wenn q den Inhalt der Berührungsfläche bedeutet. Diese Anziehung ist daher durch

$$A = 2\pi\sigma^2 q$$

gegeben.

Es ist zu bemerken, dass die Masseneinheit auf der Ankerfläche nur dann die Anziehung $2\pi\sigma$ erfährt, wenn sie im Inneren der Fläche gelegen ist. Für die dem Rande der Fläche unendlich nahe liegenden Elemente ist die Anziehung kleiner. Bei der Sum-

mirung aller Anziehungen, welche die auf dem ganzen Querschnitte des Ankers liegenden Massen erfahren, verschwindet die für die Randtheilchen vorhandene Abweichung gegen den ganzen Betrag der Summe, so dass dieser Betrag dem oben angesetzten Werthe von A gleich zu nehmen ist.

Die Dichte σ, welche der magnetischen Belegung einer Schnitt- oder Begrenzungsfläche eines Magnetes zugeschrieben werden muss, steht zu der Richtung und Intensität der Magnetisirung an der betreffenden Stelle in einer sehr einfachen Beziehung.

Errichtet man über dem Elemente ω der Schnittfläche ein Prisma von der sehr kleinen Länge λ, so dass die Richtung von λ mit jener der Magnetisirung zusammenfällt, so ist dieses Prisma als gleichförmig magnetisirt zu betrachten. Es treten nur an seinen Endflächen freie magnetische Massen auf und zwar auf jeder in der Menge $\omega\sigma$. Das magnetische Moment des Prisma ist demnach $\omega\sigma\lambda$. Dieses Moment kann man aber auch durch das Product aus dem Volumen des Prisma und dem auf die Einheit des Volumens entfallenden Momente, welches mit μ bezeichnet werden soll, ausdrücken. Bildet die Normale zu ω mit λ den Winkel θ, so ist $\omega\cos\theta\lambda$ das Volumen des Prisma und $\mu\omega\cos\theta\lambda$ sein magnetisches Moment. Setzt man diesen Werth gleich dem früheren, nämlich $\omega\sigma\lambda$, so folgt

$$\sigma = \mu\cos\theta.$$

In unserem Falle steht die Schnittfläche auf der Richtung der Magnetisirung senkrecht, es ist also $\theta = 0$ und $\sigma = \mu$. Der Ausdruck für die Anziehung von Magnet und Anker verwandelt sich demnach in

$$A = 2\pi\mu^2 q.$$

Diese Anziehung stellt zugleich die Tragkraft des Ringmagnetes dar. Da μ das Maass für die Intensität der Magnetisirung bildet, so kann man sagen, dass die Tragkraft dem Quadrate dieser Intensität der Magnetisirung und der Grössen der Berührungsfläche zwischen Anker und Magnet direct proportional ist.

Auf die Einheit der Berührungsfläche entfällt die Tragkraft

$$A = 2\pi\mu^2.$$

Die für A abgeleitete Formel ist eine bekannte, sie ist auch zur Bestimmung der Tragkraft eines Magnetes schon angewendet worden, nur sind die Bedingungen ihrer Giltigkeit nicht immer genau präcisirt worden. Diese Bedingungen sind die folgenden: Magnet und Anker dürfen keine freien magnetischen Massen enthalten; die Berührungsfläche zwischen Magnet und Anker muss senkrecht auf der Richtung der Magnetisirung stehen; die Intensität der Magnetisirung muss in allen Punkten der Berührungsfläche dieselbe sein.

In einem in zwei gleiche Hälften getheilten Ringmagnete sind die beiden ersten Bedingungen vollkommen erfüllt, die letzte im Allgemeinen nur näherungsweise. Nur wenn die Magnetisirung des Ringes im Zustande des Maximums sich befindet, sind alle Ringfäden gleich magnetisirt und dann ist auch die dritte Bedingung vollständig erfüllt.

Für den Fall des Maximums der Magnetisirung ist jedoch die Formel auch noch auf Magnete von anderer Gestalt anwendbar. Denkt man sich zwischen die beiden Halbringe gerade Prismen oder Cylinder, deren Querschnitte jenem des Ringes gleich sind, eingeschoben und diese in derselben Weise wie die Halbringe mit Draht umwickelt, so erhält man die Form eines geschlossenen Hufeisenmagnetes.

Im Zustande des Maximums der Magnetisirung wird auch ein solcher Magnet keinen freien Magnetismus besitzen und seine Tragkraft wird jener des Ringmagnetes gleich sein. Sie wird unabhängig sein von der Länge der Schenkel, auch unabhängig von der Lage der Ebene, welche den Magnet vom Anker theilt, so lange diese Ebene die Schenkel des Systems senkrecht durchschneidet. Daraus ist ersichtlich, dass es in diesem Falle gar keinen Sinn hat, die Tragkraft des Magnetes mit seinem Gewichte in Relation zu stellen.

III.

Setzt man in der Formel für die Tragkraft eines Ringmagnetes das Moment μ gleich dem Maximum des in der Volumseinheit inducirbaren Momentes, so erhält man das Maximum der Tragkraft eines Ringmagnetes.

In dem nächsten Abschnitte wird aus einer von Rowland ausgeführten Versuchsreihe der grösste Werth, welchen μ erreichen kann, abgeleitet werden. Mit demselben stimmen die aus anderen Beobachtungen abgeleiteten Werthe nahe überein. Man kann annehmen, dass das Maximum des in der Volumseinheit inducirbaren magnetischen Momentes für alle untersuchten Eisen- und Stahlsorten nahezu eine und dieselbe Grösse besitzt. Diese kann durch die Zahl 14000 ausgedrückt werden, wenn man die von Gauss eingeführten Einheiten, nämlich Millimeter als Längen-, die Masse eines Milligramms als Massen-, die Secunde als Zeiteinheit wählt. Führt man statt Millimeter und Milligramm die grösseren Einheiten Centimeter und Gramm ein, so ist das Maximum des in einem Kubikcentimeter Eisen inducirbaren magnetischen Momentes durch die Zahl 1400 gegeben.

Wird letztere Zahl in den Ausdruck $2\pi\mu^2$ für μ eingesetzt, so erhält man die Tragkraft $= 12208800$ absoluten Krafteinheiten. Dividirt man diese Zahl durch die Beschleunigung der Schwere in Centimetern ausgedrückt, also durch 980·6, so erhält man die Tragkraft gleich einem Gewichte von 12450 Grammen und dieses Gewicht gibt das Maximum der auf ein Quadratcentimeter Contactfläche reducirten Tragkraft eines Eisen- oder Stahlmagnetes an.

Dieses Maximum ist auch schon von Rowland[1] berechnet worden. Er gibt dasselbe zu 177 Pfund für den Quadratzoll in englischen Maassen an, welcher Werth mit dem soeben berechneten sehr nahe übereinstimmt. Rowland geht bei seiner Berechnung von dem Begriffe der Spannung eines magnetischen Feldes aus, welcher Begriff von Maxwell eingeführt wurde. Diese Spannung ist in unseren Bezeichnungen ausgedrückt nichts anderes, als die Kraft $2\pi\mu^2$.

Rowland führt zum Vergleiche mit der Rechnung eine von Joule herrührende Tabelle an, in welcher die Tragkräfte von sehr starken Elektromagneten zusammengestellt sind. Sie liegen alle, einige zum Theil sehr weit unter dem berechneten Maximum.

Die Form dieser Magnete ist nicht der Art, dass ihre Tragkraft mit der oben abgeleiteten Formel in Verbindung gebracht werden kann. Unter denselben befindet sich allerdings auch ein

[1] Phil. Mag. 4 sér. XLVI. 158.

von Joule construirter Ringmagnet. Derselbe zeigt jedoch eine verhältnissmässig kleine Tragkraft. Die Ursache davon liegt einestheils darin, dass nicht der ganze Ring von der Stromspirale umgeben war, anderentheils aber auch darin, dass Magnet und Anker zwei ungleiche Segmente des Ringes bildeten. Dass in einem solchen Falle die zu erreichende Tragkraft kleiner ist, wird in einem der folgenden Abschnitte dargethan werden.

Später hat Joule einen Magnet von grösserer Tragkraft hergestellt, jedoch hat derselbe keine geometrisch einfache Gestalt. Aus seinen Versuchen mit diesem Magnete hat er den Schluss gezogen, dass das Maximum der Flächenanziehung zwischen Anker und Magnet 175 Pfund für den Quadratzoll betrage, ein Werth, der ausserordentlich nahe dem oben berechneten kommt.[1] Joule hält noch eine grössere Tragkraft für möglich, knüpft aber an seine Erörterungen die Bemerkung, es sei unwahrscheinlich, dass eine grössere Tragkraft als die von 200 Pfunden erzielt werden könnte. Darauf ist vielleicht die mit der Rechnung in Widerspruch stehende Angabe in Jenkin's Electricity and Magnetism., p. 123, zurückzuführen, dass Joule eine Tragkraft von 200 Pfunden beobachtet habe.

Von den vielen Versuchen, welche über die Tragkraft der Magnete angestellt wurden, sind überhaupt nur sehr wenige unter solchen Bedingungen ausgeführt, dass sie einer theoretischen Erörterung zugänglich wären. Am besten schliessen sich einige Versuche, welche v. Waltenhofen in der Abhandlung über elektromagnetische Tragkraft[2] mitgetheilt hat, in Bezug auf die Anordnung des Apparates den Voraussetzungen an, unter welchen obige Formel für die Tragkraft abgeleitet ist. Bei diesen Versuchen hatten Magnet und Anker die Form von Halbringen, welche beide vom magnetisirenden Strome umflossen waren. Die Windungen umschlossen allerdings nicht den ganzen Ring, Magnet und Anker waren nicht ganz bis an ihre Enden umwickelt.

Die grösste Tragkraft, welche v. Waltenhofen an diesem Systeme beobachtete, betrug 16·24 Kilogramme. Aus einer graphischen Darstellung der Tragkräfte, welche bei verschiedenen

---

[1] Phil. Mag. 4. sér. III. 35.
[2] Sitzungsberichte LXI. (2. Abth.) 746.

magnetisirenden Kräften erhalten wurden, zog v. Waltenhofen den Schluss, dass das Maximum der Tragkraft seines Magnetes 18 Kilogramme betragen dürfte. Die benützte graphische Darstellung gewährt jedoch keine grosse Genauigkeit.

Der Querschnitt des Magnetes war ein Kreis von einem Centimeter Durchmesser. Die beiden Contactflächen hatten also einen Inhalt von 1·57 Quadratcentimetern und diesem würde nach meiner Berechnung das Gewicht von 19·546 Kilogrammen als Maximum der Tragkraft dieses Magnetes entsprechen.

IV.

Bei den meisten Versuchen über die Tragkraft der Elektromagnete wurde das Ziel verfolgt, die Beziehung zwischen der Tragkraft und der Intensität des magnetisirenden Stromes zu finden. Für den Fall eines Ringmagnetes wäre diese Aufgabe gelöst, wenn die Beziehung zwischen dem inducirten magnetischen Momente μ und der Grösse der magnetisirenden Kraft bekannt wäre. Es ist jedoch bis jetzt noch keine diesen Zusammenhang vollkommen darstellende Formel gefunden worden und desshalb ist es auch nicht möglich, ein allgemeines Gesetz über die Beziehung zwischen der Tragkraft und der magnetisirenden Kraft anzugeben.

Es sind aber die bisher über die Magnetisirung des Eisens gemachten Beobachtungen doch geeignet, um aus denselben ein ziemlich vollständiges Bild dieser Beziehung zu entwickeln. Ich will dazu eine von Rowland über die Magnetisirung eines Eisenringes ausgeführte Versuchsreihe benützen. Aus den von ihm mitgetheilten Daten sind die Zahlen der folgenden Tabelle berechnet. Dieselben haben folgende Bedeutungen.

In der ersten Reihe unter R stehen die Werthe der magnetisirenden Kräfte. Die zweite Reihe enthält unter μ die auf die Volumseinheit entfallenden inducirten magnetischen Momente. Den Zahlen in dieser wie auch jenen in der ersten Tabelle liegen die von Gauss gewählten absoluten Einheiten zu Grunde.

Die dritte Reihe enthält unter k die sogenannten Magnetisirungszahlen, d. i. die Quotienten, welche man μ durch R dividirend enthält.

In der vierten Reihe sind die der Abkürzung wegen durch 1000 dividirten Producte von μ und k eingetragen.

R	μ	k	$\frac{\mu k}{1000}$
1·893	56·9	31·01	1·77
6·913	477·9	69·05	33·0
8·564	769·3	89·76	54·9
12·705	1958	154·1	302
14·06	2326	165·3	385
14·51	2453	168·9	415
20·39	3947	193·5	764
22·19	4362	196·5	857
23·39	4601	196·6	905
27 17	5293	194·7	1031
31·57	5947	188·3	1120
40·50	7177	175·6	1272
53·09	8021	151·0	1212
84·75	9742	115·2	1120
102·24	10320	100·9	1042
119·9	10850	90·40	988
176·4	11570	65·50	759
341·6	12550	36·67	461
459·9	12950	28·07	365
634·1	13210	20·45	271

Für die Erforschung der Eigenthümlichkeiten des Eisens ist es von grosser Wichtigkeit, die darauf sich beziehenden Grössen nicht als Functionen der magnetisirenden Kraft, wie es sonst üblich ist, sondern als Functionen des inducirten Momentes μ zu betrachten.

Wenn man die Werthe von μ als Abscissen, die zugehörigen Werthe von k als Ordinaten aufträgt, so erhält man eine Curve, welche sehr rasch bis zu einem Maximum ansteigt, dann abwärts sich wendet und zum Schluss einer Geraden sich nähert, welche die Abscissenaxe unter einem spitzen Winkel schneidet. Der Durchschnittspunkt ist durch jene Abscisse gegeben, welche das Maximum des inducirbaren Momentes darstellt, denn für dieses Maximum ist R unendlich gross, also $k = 0$.

Die Ähnlichkeit des letzten Theiles der Curve mit einer Geraden ergibt sich auch aus der vorstehenden Tabelle. Bildet man in der Colonne der k etwa von dem Werthe 115·2 an die Differenzen der auf einander folgenden Zahlen und dividirt dieselben durch die Differenzen der zugehörigen Werthe von μ, so erhält man der Reihe nach folgende Quotienten:

0·0247, 0·0198, 0·0346, 0·0294, 0·0215, 0·0293.

Dieselben zeigen grosse Abweichungen von einander, doch sind diese nicht regelmässig und ist z. B. das Mittel der drei ersten sehr wenig von dem Mittel der drei letzten verschieden. Man kann daher wenigstens näherungsweise die wirkliche Curve durch eine Gerade ersetzen, welche durch den Mittelwerth der obigen Differenzen 0·0266 bestimmt ist.

Mit Hilfe dieses Mittelwerthes kann man nun auch den Werth m der Abscisse, welche dem Maximum des inducirbaren magnetischen Momentes entspricht, bestimmen. Innerhalb des Bereiches der angenommenen Geraden besteht nämlich die Gleichung

$$k = 0\cdot0266\,(m - \mu),$$

aus welcher

$$m = \mu + \frac{k}{0\cdot0266}$$

sich ergibt. Setzt man in diese Formel die zusammengehörigen Werthe von μ und k, und zwar von $\mu = 9742$ und $k = 115\cdot2$ angefangen bis an das Ende der Tabelle, so erhält man für m der Reihe nach die Zahlen

14073, 14113, 14250, 14032, 13928, 14005, 13978.

Das Mittel derselben ist 14053.

Die Werthe von m, welche sich aus anderen Beobachtungen ergeben, weichen von dem hier berechneten nur wenig ab.

Wenn k der Differenz $m - \mu$ proportional gesetzt wird, so ist die Beziehung zwischen dem inducirten Momente und der magnetisirenden Kraft durch die Gleichung

$$\frac{\mu}{m - \mu} = \alpha R$$

gegeben, in welcher α eine Constante bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{\mu}{m} = \frac{\alpha R}{1 + \alpha R}.$$

Der Werth von μ, von welchem an diese Gleichung angewendet werden kann, darf etwa $= 0 \cdot 7 m$ angenommen werden.

Da die Tragkräfte den Quadraten der Momente proportional sind, so können dieselben in dem angegebenen Intervalle gleichfalls nach der einfachen Formel

$$\frac{A}{A_1} = \left(\frac{\alpha R}{1 + \alpha R}\right)^2$$

berechnet werden. A_1 bedeutet in dieser Formel das Maximum, A den der magnetisirenden Kraft R entsprechenden Werth der Tragkraft. Da dem Werthe $\mu = 0 \cdot 7 m$ die Tragkraft $A = 0 \cdot 49 A_1$ entspricht, so kann man die aufgestellte Formel auf alle Tragkräfte, welche über der Hälfte des Maximums liegen, anwenden.

Die Constante α ist von der speciellen Beschaffenheit der Eisens, welches den Kern des Elektromagnetes bildet, abhängig. Da α nur im Producte αR erscheint, so kann bei der Berechnung von Versuchen statt R auch eine der magnetisirenden Kraft proportionale Grösse, also die Intensität des magnetisirenden Stromes in irgend welchem Maasse ausgedrückt, eingesetzt werden. Die Verwandlungszahl, mit welcher diese Grösse in R umgesetzt werden kann, ist dann in der Constante α inbegriffen.

In der oben citirten Abhandlung v. Waltenhofen's sind z. B. folgende zusammengehörige Werthe der Stromstärken und der Tragkräfte des Magnetes angegeben:

$$R = 37 \cdot 4, \quad 45 \cdot 55, \quad 91 \cdot 05, \quad 236 \cdot 28$$
$$A = \quad 8 \cdot 97, \quad 10 \cdot 27, \quad 13 \cdot 87, \quad 16 \cdot 24.$$

Nimmt man an, dass auch für die Versuchsanordnung v. Waltenhofen's der theoretische Werth des Maximums der Tragkraft $= 19 \cdot 55$ Kilogrammen giltig ist, so erhält man aus den zwei zusammengehörigen Daten $R = 45 \cdot 55$ und $A = 10 \cdot 27$

die Constante $\alpha = 0 \cdot 0578$. Mit diesem Werthe findet man dann die den drei anderen Stromstärken entsprechenden Tragkräfte

$$9 \cdot 14,\ 13 \cdot 81,\ 16 \cdot 97.$$

Es sind demnach an den von v. Waltenhofen gefundenen Werthen nur verhältnissmässig kleine Änderungen vorzunehmen, damit sie der aufgestellten Formel entsprechen.

So wie für die Tragkräfte, welche über der Hälfte des Maximums liegen, liessen sich auch für die kleineren Näherungsformeln aufstellen. Doch mag es hier genügen, auf den Zusammenhang zwischen der Tragkraft und der magnetisirenden Kraft, insoweit die obige Tabelle ihn unmittelbar darlegt, hinzuweisen. Dieser Zusammenhang wird durch die Colonne, welche die Producte aus μ und k enthält, dargestellt. Da k das Verhältniss von μ zu R angibt, so gibt μk jenes von μ^2 zu R, die in der bezeichneten Colonne enthaltenen Zahlen messen daher das Verhältniss der Tragkraft zur magnetisirenden Kraft.

Man sieht, dass dieses Verhältniss anfänglich sehr rasch, dann langsamer bis zu einem grössten Werthe steigt, von da an wieder langsam abfällt, um schliesslich den Werth Null zu erreichen. Den grössten Werth erreicht das Verhältniss in der Tabelle für den Werth $\mu = 7177$, welcher etwas grösser ist, als die Hälfte des Maximums des Momentes, und somit einer Tragkraft entspricht, welche $\frac{1}{4}$ des Maximums der Tragkraft nicht viel übersteigt. In der Nähe dieses Werthes ändern sich natürlicherweise die Werthe von μk nur wenig, so dass in einem grösseren Intervall die Tragkraft der magnetisirenden Kraft nahe proportional bleibt.

Dieses Verhalten ist darin begründet, dass die Magnetisirungszahl k mit wachsenden Werthen von μ erst steigt und dann wieder abnimmt. In der Abhandlung „zur Theorie der magnetischen Kräfte“ [1] habe ich eine grössere Anzahl von Beobachtungen in Tabellen gebracht. Aus denselben geht hervor, dass diese Eigenschaft von k bei allen Eisen- und Stahlarten, auch beim Nickel, in gleicher Weise vorhanden ist und dass das

[1] Sitzungsberichte LXIX. (2. Abth.)

Maximum von k bei allen nahe an eine und dieselbe Stelle, nämlich zwischen $\mu = \frac{1}{3} m$ und $\mu = \frac{2}{5} m$ zu liegen kommt, während die Grösse dieses Maximalwerthes von einer Art zur andern bedeutend variirt. Desshalb wird auch der Gang der Werthe von μk und damit der Zusammenhang zwischen Tragkraft und magnetisirender Kraft für andere Eisenstücke dem durch die obige Tabelle gegebenen nicht gleich, wohl aber demselben sehr ähnlich sein.

V.

Es soll nun angenommen werden, dass die Ebene, welche den magnetischen Ring in Magnet und Anker scheidet, nicht durch die Axe des Ringes geht, sondern ihr nur parallel ist. Bezüglich der Magnetisirung soll jedoch wie früher angenommen werden, dass ihre Intensität für alle Fäden des Ringes denselben Werth hat.

Dieser Fall unterscheidet sich von dem früheren im Wesentlichen dadurch, dass die Richtung der Magnetisirung an den Contactflächen von Magnet und Anker nicht zu diesen Flächen senkrecht steht, sondern gegen dieselben geneigt ist. Diese Neigung ist nicht für alle Punkte der Contactfläche dieselbe, denn die inneren Fäden des Ringes treffen diese Fläche unter spitzeren Winkeln als die äusseren Fäden. Es soll jedoch zunächst davon abgesehen und für diese verschiedenen Winkel jener, unter welchem der durch den Schwerpunkt jeder der Contactflächen gehende Faden diese schneidet, gesetzt werden. Der dadurch entstehende Fehler ist um so geringer, je kleiner die radialen Dimensionen des Ringquerschnittes gegen den Abstand des Schwerpunktes desselben von der Axe sind.

Dieser Winkel mag mit ε bezeichnet werden, jener welchen die Normale zu den Contactflächen mit der Richtung des Ringfadens bildet mit θ. Diese zwei Winkel ergänzen sich zu einem rechten.

Die Dichte der magnetischen Belegung auf den Berührungsflächen ist nun durch

$$\sigma = \mu \cos \theta = \mu \sin \varepsilon,$$

die Flächenanziehung also durch

$$A = 2\pi q' \mu^2 \cos^2\theta = 2\pi q' \mu^2 \sin^2\varepsilon$$

bestimmt, wenn q' den Inhalt der Contactflächen darstellt.

Ohne den Factor q' gibt diese Formel die Tragkraft auf die Einheit der Berührungsfläche bezogen. Diese ist also im Verhältniss von $\sin^2\varepsilon$ 1 kleiner, als jene, welche im Ringmagnete in einem Diametralschnitte auftritt.

Es ist jedoch auch die ganze Tragkraft in dem jetzigen Falle kleiner, als in dem früheren, obgleich die Contactfläche eine grössere geworden ist. Da

$$q = q' \cos\theta = q' \sin\varepsilon,$$

so ist

$$A = 2\pi \mu^2 q \sin\varepsilon,$$

also im Verhältniss von $\sin\varepsilon$ 1 kleiner, als in dem Falle, in welchem Magnet und Anker zwei Halbringe sind.

Zieht man von der Axe einen Radius zum Schwerpunkte einer der Contactflächen und zugleich eine Senkrechte auf die den Ring schneidende Ebene, so ist der von diesen zwei Linien gebildete Winkel dem Winkel ε gleich.

Wenn z. B. der Ring in zwei Theile zerschnitten wird, deren Längen sich wie 5 zu 1 verhalten, so wird $\varepsilon = 30$ und $\sin\varepsilon = \frac{1}{2}$. Die Tragkraft des Ringes wird nur halb so gross sein, als bei einem diametralen Schnitte, obgleich die Berührungsfläche die doppelte Grösse besitzt.

Wenn der Winkel, unter welchem die einzelnen Ringfäden die Contactflächen schneiden, nicht für alle gleich angenommen werden darf, so wird die Dichte σ, welche man den magnetischen Belegungen in den verschiedenen Orten der Contactflächen zuschreiben muss, sich innerhalb dieser continuirlich ändern.

Die Anziehung, welche eine der Fläche unendlich nahe liegende Masseneinheit von der Belegung erfährt, ist auch in diesem Falle durch den Ausdruck $2\pi\sigma$ gegeben.

Nur ist in diesem Ausdrucke jener Werth von σ einzusetzen, welcher dem der afficirten Masseneinheit unmittelbar gegenüberliegenden Punkte der Fläche entspricht.

Da zu der zu bestimmenden Kraft nur die diesem Punkte zunächst liegenden Theile der Fläche beitragen, so braucht man bei der Berechnung derselben nur eine sehr kleine Scheibe, deren Centrum in diesem Punkte liegt, zu berücksichtigen. Von der Mitte aus wird die Dichte der Scheibe nach einer bestimmten Richtung hin zunehmen, nach der entgegengesetzten abnehmen. Man kann nun die Scheibe zuerst mit der dem Centrum entsprechenden Dichte σ belegen. Diese Belegung übt auf die dem Centrum gegenüberstehende Masseneinheit die Anziehung $2\pi\sigma$ aus. Die Zunahme der Dichte nach der einen Richtung kann man durch Auftragen mit der Belegung gleichartiger Massen auf der einen Seite, die Abnahme der Dichte nach der umgekehrten Richtung durch Auftragen entgegengesetzter Massen herstellen. Die dem Centrum der Scheibe gegenübergestellte Masseneinheit befindet sich also noch unter dem Einflusse von Massen, welche paarweise von ihr gleich weit abstehen, aber auf entgegengesetzten Seiten liegen und auch entgegengesetzt bezeichnet sind. Die Resultante der Wirkungen jedes solchen Paares von Massen geht zur Scheibe parallel, liefert also keine zu dieser Scheibe senkrechte Componente. Es bleibt somit nur die Wirkung der Belegung, welche mit der dem Centrum der Scheibe entsprechenden Dichte aufgetragen wurde, übrig.

Ein Element dS der Ankerfläche sei mit Masse von der Dichte σ' belegt, der gegenüberliegenden Stelle der Magnetfläche entspreche die Dichte σ, dann wird die Masse $\sigma' dS$ mit der Kraft $2\pi\sigma\sigma' dS$ senkrecht gegen die Magnetfläche gezogen. Auf die gesammte Masse der Ankerfläche entfällt demnach die Anziehung

$$A = 2\pi \int \sigma\sigma' dS.$$

Die Integration ist über die ganze Ausdehnung des Contactes zu erstrecken.

In dem vorliegenden Falle ist $\sigma = \sigma'$, also

$$A = 2\pi \int \sigma^2 dS.$$

Ferner ist

$$\sigma = \mu \cos\theta = \mu \sin\varepsilon,$$

wenn ε den Winkel bedeutet, unter welchem das Flächenelement dS von dem entsprechenden Ringfaden durchsetzt wird. θ ist die Ergänzung des Winkels ε zu einem Rechten.

Nimmt man μ für alle Ringfäden als gleich an, so verwandelt sich der Ausdruck für die Tragkraft in

$$A = 2\pi\mu^2 \int \cos^2\theta\, dS = 2\pi\mu^2 \int \sin^2\varepsilon\, dS.$$

Ist die Gestalt des Querschnittes des Ringes gegeben, so lässt sich das Integral berechnen.

Ist z. B. der Querschnitt des Ringes ein Rechteck, so dass der Ringkörper von zwei concentrischen Ringflächen eingeschlossen ist, so erhält man

$$A = 2\pi\mu^2 q \frac{r_1(\sin\varepsilon_1 - \varepsilon_1\cos\varepsilon_1) - r_0(\sin\varepsilon_0 - \varepsilon_0\cos\varepsilon_0)}{r_1 - r_0}.$$

Darin bedeutet q den Inhalt eines Diametralschnittes des Ringes, r_0 den Radius des inneren, r_1 den Radius des äusseren Cylindermantels. Die Winkel ε_0 und ε_1 sind durch die Gleichungen

$$a = r_0\cos\varepsilon_0 = r_1\cos\varepsilon_1$$

bestimmt, wenn a den Abstand der Schnittebene von der Axe des Ringes bedeutet.

Der Factor von $2\pi\mu^2 q$ ist kleiner als die Einheit und erhält seinen kleinsten Werth, wenn $\varepsilon_0 = 0$, also $a = r_0$ wird.

VI.

Die in den vorhergehenden Rechnungen gemachte Voraussetzung, dass μ für alle Theile der Berührungsflächen von Anker und Magnet denselben Werth habe, ist nur dann vollständig erfüllt, wenn alle Fäden des Ringes im Zustande des Maximums der Magnetisirung sich befinden. Ist letzteres nicht der Fall, so wird μ für die inneren Fäden grösser als für die äusseren, also auch aus diesem Grunde die Dichte der magnetischen Belegungen der Berührungsflächen als eine veränderliche zu betrachten sein.

Diese Veränderlichkeit von μ rührt, wie schon im ersten Abschnitte bemerkt worden, daher, dass die magnetisirende Kraft

des Stromes, welcher den Eisenkern umfliesst, innerhalb der Spirale nicht constant, sondern in jedem Punkte dem Abstande desselben von der Axe des Ringes verkehrt proportional ist. Man kann dies leicht auf folgende Art erweisen.

Jede Windung der Spirale kann man als einen geschlossenen Strom betrachten und diesen durch eine transversal magnetisirte von der Strombahn begrenzte Platte ersetzen. Das magnetische Moment dieser Platte muss gleich sein der Fläche, welche der Strom umkreist, multiplicirt mit der Intensität des Stromes. Ist σ die Dichte der magnetischen Belegungen auf den zwei Seiten der Platte und δ die Dicke der letzteren, so muss die Gleichung

$$\sigma\delta = i$$

erfüllt sein, wenn i die Intensität des Stromes bedeutet.

Anstatt die Platte von durchaus gleicher Dicke vorauszusetzen, wie dies gewöhnlich zu geschehen pflegt, kann man dieselbe auch keilförmig annehmen, so dass die Schneide des Keiles mit der Axe des Ringes zusammenfällt. Damit für jeden Punkt der Stromfläche das auf die Flächeneinheit reducirte magnetische Moment der Platte denselben Werth behält, ist die Dichte der Belegung veränderlich zu nehmen, so dass, wenn σ' und δ' zwei zusammengehörige Werthe der Dichte und der Dicke der Platte bedeuten, das Product $\sigma'\delta'$ den constanten Werth i besitzt.

Ersetzt man jede Windung durch eine solche Platte, so füllen die auf einander folgenden Platten den von der Stromspirale umschlossenen Raum vollständig aus. Um die magnetische Kraft des Stromes in einem Punkte innerhalb der Spirale zu erhalten, hat man sich diesen Punkt zwischen zwei auf einander folgenden Platten liegend zu denken. Er befindet sich zwischen zwei mit entgegengesetzten Massen belegten Flächen und liegt jeder derselben unendlich nahe. Die Kraft, mit welcher jede derselben den Punkt in der Richtung ihrer Normale treibt, ist $2\pi\sigma'$, die Summe der beiden $4\pi\sigma'$. Die aus der Veränderlichkeit von σ' entspringenden seitlichen Kräfte heben sich auf. Die von dem Strome ausgeübte Kraft ist somit

$$R = 4\pi\sigma' = \frac{4\pi i}{\delta'}.$$

Ist r die Entfernung des Punktes von der Axe, n die Anzahl der Windungen der Spirale, so ist

$$n\delta' = 2\pi r$$

und somit

$$R = \frac{2ni}{r}.$$

Obwohl nun R für jeden Punkt des Ringes bekannt ist, so ist dies doch für μ nicht der Fall, da keine Formel, welche den Zusammenhang von R und μ genügend darstellte, bekannt ist. Es kann desshalb nur eine approximative Berechnung ausgeführt werden.

Wenn die radialen Dimensionen des Querschnittes des Ringes klein sind gegen den mittleren Radius des letzteren, so werden die Werthe der magnetisirenden Kraft in den verschiedenen Punkten des Querschnittes nur einen kleinen Spielraum umfassen und man kann in erster Annäherung annehmen, dass innerhalb desselben das inducirte Moment zur magnetisirenden Kraft in einem constanten Verhältnisse stehe. Eine grössere Annäherung an die Wirklichkeit wird in den meisten Fällen dadurch erzielt, dass man diese Verhältnisszahl selbst als lineare Function des inducirten Momentes betrachtet. Ob man die eine oder die andere Annahme macht, bietet die Berechnung der Anziehung zwischen Anker und Magnet keine Schwierigkeit. Was aber die in den Formeln enthaltenen Constanten anbetrifft, so werden die Werthe derselben sowohl von der Grösse der inducirten Momente oder der magnetisirenden Kräfte, wie auch von der speciellen Beschaffenheit des verwendeten Eisens abhängig sein.

VII.

In diesem Abschnitte soll der Fall betrachtet werden, in welchem Anker und Magnet zusammen eine Kugel bilden.

Eine der Grösse und Richtung nach constante äussere magnetisirende Kraft verwandelt eine Eisenkugel in einen homogenen Magnet, d. h. Richtung und Intensität der Magnetisirung sind in allen Punkten der Kugel dieselben. Die magnetische Axe ist der Richtung der äusseren magnetisirenden Kraft parallel. Die Kugel

besitzt in ihrem Inneren keine freien magnetischen Massen Solche sind aber an der Oberfläche vorhanden. Die Dichte der Flächenbelegung in einem Punkte der Oberfläche ist bestimmt durch den Ausdruck $\mu \cos \varepsilon$, wenn μ das magnetische Moment der Volumseinheit und ε den Winkel bedeutet, welchen der zu dem betrachteten Punkte gezogene Radius mit der magnetischen Axe bildet.

Durch eine zur magnetischen Axe senkrechte Ebene werde die Kugel in zwei Abschnitte getheilt und der eine von diesen als Magnet, der andere als Anker betrachtet.

Die Anziehung der auf den Contactflächen vorhandenen Massen ist durch das Product aus $2\pi\mu$ in die Gesammtmasse der einen Fläche gegeben. Letztere ist $q\mu$, wenn q den Inhalt der Fläche bedeutet. Die erste Componente der Tragkraft ist somit

$$2\pi\mu^2 q.$$

Es sind nun die Kräfte zu berechnen, welche von den auf den Oberflächen des Magnetes und Ankers befindlichen Massen auf die Belegungen der Contactflächen ausgeübt werden.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, möge angenommen werden, dass der Anker das kleinere der zwei Kugelsegmente bildet und auf der Seite sich befindet, auf welcher die positive Richtung der magnetisehen Axe aus der Kugel heraustritt. Die Oberfläche des Magnetes wird dann zum grösseren Theile mit negativer, zum kleineren Theile mit positiver, die Oberfläche des Ankers wird nur mit positiver Masse belegt sein. An dem Contacte wird der Magnet positive, der Anker negative Masse tragen.

Zwischen den gleichnamigen Massen der Contactfläche des Magnetes und der Oberfläche des Ankers findet eine Abstossung statt, diese vermindert die Tragkraft. Dasselbe gilt im Allgemeinen auch von der Wechselwirkung zwischen der überwiegend negativen Ladung des Magnetes und der negativen Belegung der Contactfläche des Ankers.

Die Resultante dieser zwei Wirkungen ist in folgender Weise zusammenzusetzen. Zu der Wirkung der Oberfläche des Magnetes auf die Contactfläche des Ankers ist die von der Contactfläche des Magnetes auf die Oberfläche des Ankers ausgeübte Kraft

hinzuzufügen. Letztere Kraft ist aber der Richtung und Grösse nach gleich derjenigen, welche von der Oberfläche des Ankers auf die Belegung seiner eigenen Contactfläche ausgeübt wird. Man kann also bei der Zusammensetzung der Kräfte annehmen, dass alle von den Massen auf der Oberfläche ausgehen und nur auf die Belegung der Contactfläche des Ankers wirken.

Die gesammte auf der Kugelfläche vorhandene Belegung wirkt aber in jedem Punkte im Inneren der Kugel mit der constanten der magnetischen Axe entgegen gerichteten Kraft $\frac{4\pi\mu}{3}$ auf die Masseneinheit. Ihre Wirkung auf die Belegung der Contactfläche des Ankers ist somit das Product aus $q\mu$ und $\frac{4\pi\mu}{3}$. Um diese Grösse, also um

$$\frac{4}{3}\pi\mu^2 q$$

ist bei der Berechnung der Tragkraft die oben bestimmte Anziehung zwischen den Belegungen der Berührungsflächen zu vermindern.

Endlich ist noch die Kraft zu berechnen, welche von der Wechselwirkung der freien Massen auf der Oberfläche des Magnetes und jener auf der Oberfläche des Ankers herrührt. Um diese zu finden, kann man in folgender Weise vorgehen.

Man berechne zuerst das Potential der auf der Oberfläche des Magnetes vorhandenen Ladung auf einen in der Axe gelegenen Punkt. Die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte der Kugel sei x, seine Entfernung von dem Scheitel des Kugelsegmentes, welches den Magnet bildet, $a+x$. Vom Mittelpunkte werde unter dem Winkel ε gegen die Axe der positiven x geneigt ein Radius zur Kugelschale gezogen und dem entsprechend ein unendlich schmaler Ring als Flächenelement der Kugelschale gebildet. Der Abstand eines Punktes des Ringes von dem Punkte, für welchen das Potential berechnet werden soll, ist $\sqrt{a^2-2ax\cos\varepsilon+x^2}$, die Dichte der Belegung auf dem Ringe ist $\mu\cos\varepsilon$, es ist demnach das Potential V durch das Integral von

$$\frac{2\pi a^2\mu\cos\varepsilon\sin\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{a^2-2ax\cos\varepsilon+x^2}}$$

gegeben. Die obere Grenze dieses Integrals ist π, die untere der Winkel, welchen der zum Rande des Kugelsegmentes gezogene Radius mit der Axe einschliesst.

Setzt man

$$\cos\varepsilon = u, \quad \sin\varepsilon\, d\varepsilon = -du$$

und den Cosinus des Winkels, welcher die untere Grenze des Integrals bildet, $= c$, so folgt

$$V = 2\pi\mu\, a^2 \int_{-1}^{c} \frac{u\, du}{\sqrt{a^2 - 2axu + x^2}}.$$

Dieses Integral lässt sich leicht in geschlossener Form darstellen. Im vorliegenden Falle ist es jedoch vortheilhafter, dasselbe in eine Reihe zu entwickeln. Wird x kleiner als a vorausgesetzt, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2u\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}}} = P_0 + P_1\frac{x}{a} + P_2\frac{x^2}{a^2} + \ldots$$

worin P_0, P_1, P_2, ... die unter dem Namen der Kugelfunctionen bekannten Functionen von u bedeuten. Nach Einführung dieser Entwicklung in den Ausdruck für V erhält man

$$V = 2\pi\mu\, a\left(A_0 + A_1\frac{x}{a} + A_2\frac{x^2}{a^2} + A_3\frac{x^3}{a^3} + \ldots\right),$$

worin der Kürze wegen

$$\int_{-1}^{c} P_n u\, du = A_n$$

gesetzt ist.

Die Kraft, welche die Belegung des Kugelsegmentes auf die positive Masseneinheit im Punkte x ausübt, ist durch $-\frac{dV}{dx}$ bestimmt, und es ist

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi\mu\left(A_1 + 2A_2\frac{x}{a} + 3A_3\frac{x^2}{a^2} + \ldots\right).$$

Aus diesem Ausdrucke kann man leicht den Werth von $\frac{dV}{dx}$ für einen Punkt, welcher ausserhalb der Axe liegt, ableiten. Liegt derselbe in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Kugel, so dass r mit der Axe den Winkel θ bildet und kleiner ist als a, so hat $\frac{dV}{dx}$ in diesem Punkte den Werth

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi\mu \left(A_1 P_0 + 2 A_2 P_1 \frac{r}{a} + 3 A_3 P_2 \frac{r^2}{a^2} + \ldots \right),$$

worin jetzt P_0, P_1, P_3, ... dieselben Functionen, wie vorhin, jedoch für den speciellen Werth $u = \cos\theta$ bedeuten.

Es mag hier eingeschaltet werden, dass für den Fall, als die von der Ladung der ganzen Kugeloberfläche auf einen inneren Punkt ausgeübte Kraft bestimmt werden soll, die obere Grenze der mit A bezeichneten Integrale $c = 1$ anzunehmen ist.

Es ist aber bekanntlich

$$\int_{-1}^{1} P_n u \, du = 0$$

für alle Werthe von n mit Ausnahme von $n = 1$. Es bleibt daher in der obigen Formel nur das erste Glied übrig. Da $P_0 = 1$, $P_1 = u$, also für $c = 1$, $A_1 = \frac{2}{3}$ wird, so reducirt sich $\frac{dV}{dx}$ auf den Werth $\frac{4\pi\mu}{3}$, welcher oben schon benützt worden ist.

Der für $\frac{dV}{dx}$ aufgestellte Ausdruck behält seine Giltigkeit auch noch für $r = a$. Für diesen speciellen Werth ist

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi\mu (A_1 P_0 + 2 A_2 P_1 + 3 A_3 P_2 + \ldots)$$

Damit ist die zur Axe parallele Componente der Kraft gefunden, mit welcher die Belegung des einen Kugelsegmentes auf einen Punkt in der Oberfläche des anderen Segmentes, dessen Lage durch den Winkel θ bestimmt ist, wirkt. Das zwischen den Grenzen 0 und Arccos c genommene Integral von

$$\frac{dV}{dx}.2\pi a^2\mu\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

bestimmt dann die Anziehung zwischen den Belegungen der beiden Segmente.

Setzt man wieder $\cos\theta = u$, so lässt sich diese Anziehung, deren Werth mit K bezeichnet werden soll, darstellen durch

$$K = 4\pi^2 a^2 \mu^2 \int_c^1 \frac{dV}{dx} u\,du.$$

Führt man den Werth von $\frac{dV}{dx}$ ein und setzt der Abkürzung wegen

$$\int_c^1 P_n u\,du = B_n,$$

so erhält man

$$K = 4\pi^2 a^2 \mu^2 (A_1 B_0 + 2 A_2 B_1 + 3 A_3 B_2 + \ldots).$$

Zwischen den mit A und B bezeichneten Integralen besteht eine einfache Beziehung. Es ist nämlich

$$A_n + B_n = \int_{-1}^{+1} P_n u\,du,$$

somit

$$A_n + B_n = 0$$

für jeden Werth von n mit Ausnahme des Werthes $n = 1$. Mit Ausnahme von B_1 kann man also jedes B_n durch $-A_n$ ersetzen. Da für $n = 1$

$$A_1 + B_1 = \frac{2}{3},$$

so kann man den Ausdruck für K in die Form

$$K = 4\pi^2 a^2 \mu^2 \left(\frac{4A_2}{3} - A_0 A_1 - 2 A_1 A_2 - 3 A_2 A_3 - 4 A_3 A_4 - \ldots\right)$$

oder

$$K = 4\pi^2 a^2 \mu^2 \left[\frac{4A_2}{3} - (A_0 + 2A_2)A_1 - (3A_2 + 4A_4)A_3 - \ldots\right]$$

bringen.

Die Summe dieser Reihe lässt sich in folgender Weise bestimmen.

Die Anziehung zwischen den freien Massen auf der Oberfläche der Kugel bleibt dieselbe, wenn der Magnet das kleinere, der Anker das grössere Kugelsegment bildet. Bei der Berechnung der Anziehung ändert sich bei dieser Vertauschung die Integrationsgrenze c in $-c$.

Von den mit A_n bezeichneten Integralen ändern sich in Folge dieser Vertauschung alle jene nicht, für welche n eine gerade Zahl ist. Denn ist n eine gerade Zahl, so ist P_n eine gerade Function von u und eine solche auch das unbestimmte Integral von $P_n u du$, also A_n vom Zeichen der Integrationsgrenzen unabhängig.

In dem neuen Ausdrucke für K erscheinen also nur die A_n, für welche n eine ungerade Zahl ist, geändert. Ihr neuer Werth soll durch A'_n ausgedrückt werden. Es ist also nach der neuen Art der Berechnung

$$K = 4\pi^2 a^2 \mu^2 \left[\frac{4A_2}{3} - (A_0 + 2A_2)A'_1 - (3A_2 + 4A_4)A'_3 \ldots\right].$$

Addirt man die beiden für K vorliegenden Ausdrücke, so erhält man

$$2K = 4\pi^2 a^2 \mu^2 \left[\frac{8A_2}{3} - (A_0 + 2A_2)(A_1 + A'_1) - \right.$$
$$\left. - (3A_2 + 4A_4)(A_3 + A'_3) - . \right].$$

Es ist nun, wenn n eine ungerade Zahl ist, P_n eine ungerade Function von u, somit

$$A'_n = \int_{-1}^{-c} P_n u\, du = -\int_{1}^{c} P_n u\, du = \int_{c}^{1} P_n u\, du,$$

so dass die Summe

$$A_n + A'_n = \int_{-1}^{+1} P_n u\,du$$

wieder für alle ungeraden n der Null gleich ist, mit Ausnahme des Falles $n = 1$, in welchem

$$A_1 + A'_1 = \frac{2}{3}.$$

Der Ausdruck für $2K$ reducirt sich sonach auf

$$2K = 4\pi^2 a^2 \mu^2 \left[\frac{8A_2}{3} - \frac{2}{3}(A_0 + 2A_2)\right],$$

woraus

$$K = \frac{4}{3}\pi^2 a^2 \mu^2 (2A_2 - A_0)$$

folgt. Aus den zwei Werthen

$$P_0 = 1,\ P_2 = \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2}$$

findet man

$$2A_2 - A_0 = \frac{3}{4}(1 - c^2)\left(\frac{1}{3} - c^2\right),$$

und somit

$$K = \pi^2 a^2 \mu^2 (1 - c^2)\left(\frac{1}{3} - c^2\right).$$

Es ist zu bemerken, dass K das Zeichen wechselt, die Anziehung zwischen den zwei Oberflächenladungen in eine Abstossung übergeht, wenn c^2 grösser wird, als $\frac{1}{3}$ oder wenn die Tangente des Winkels, welchen der zum Rande der Berührungsfläche des Magnetes und des Ankers gezogene Radius mit der Axe bildet, grösser wird, als 2.

Von dem Ausdrucke für K kann man noch den Factor $\pi a^2(1 - c^2)$ absondern. Derselbe bedeutet nichts anderes, als den Inhalt der Berührungsfläche zwischen Anker und Magnet, für welchen das Zeichen q eingeführt worden ist. Es ist also

$$K = \pi\mu^2 q\left(\frac{1}{3} - c^2\right).$$

Setzt man nunmehr alle Kräfte, durch welche die Tragkraft des Kugelmagnetes bestimmt ist, zusammen, so erhält man die Resultante

$$2\pi\mu^2 q - \frac{4}{3}\pi\mu^2 q + \pi\mu^2 q\left(\frac{1}{3} - c^2\right),$$

deren Werth sich auf den sehr einfachen Ausdruck

$$\pi\mu^2 q(1 - c^2)$$

reducirt.

Auf die Einheit der Fläche entfällt die Tragkraft

$$\pi\mu^2(1 - c^2) = \pi\mu^2 \sin^2\alpha,$$

wenn α den Winkel bedeutet, welchen der zum Rande der Berührungsfläche gezogene Radius der Kugel mit der magnetischen Axe bildet.

Wenn Magnet und Anker zwei Halbkugeln sind, so ist $\sin\alpha = 1$. Es hat dann nicht blos die absolute, sondern auch die relative Tragkraft ihren grössten Werth, und zwar letztere den Werth $\pi\mu^2$. Es ist aber auch dieser Maximalwerth nur halb so gross, als die Tragkraft ohne die Einwirkung der auf der Oberfläche vorhandenen freien magnetischen Massen wäre.

Je weiter die Ebene, welche die Kugel in Magnet und Anker theilt, vom Mittelpunkte sich entfernt, desto kleiner wird die relative Tragkraft des Systems, sie wird verschwindend klein, wenn diese Ebene dem Ende der Kugelaxe sehr nahe kommt.

Drückt man den Inhalt der Berührungsfläche durch den Radius der Kugel und sin α aus, so wird die ganze Tragkraft gegeben sein durch

$$A = \pi^2\mu^2 a^2 \sin^4\alpha.$$

Für sehr kleine Werthe von α kann man das Volumen v des zugehörigen Kugelsegmentes durch

$$v = \frac{1}{4}\pi a^3 \sin\alpha^4.$$

also die Tragkraft auch durch

$$A = \frac{4\pi\mu^2 v}{a}$$

ausdrücken.

Eine kleine Kugel, welche dasselbe Volumen v und dasselbe Moment μ besitzt, wie das Segment, würde von der grossen Kugel mit einer Kraft

$$A' = \frac{4\pi a^3 \mu}{3} . v\mu . \frac{6}{x^4}$$

angezogen, wenn x die Distanz der Mittelpunkte der beiden Kugeln bedeutet. Wenn die beiden Kugeln sich berühren, so kann man wegen der Kleinheit der einen $x = a$ setzen und erhält für die Anziehung der beiden den Werth

$$A' = \frac{8\pi \mu^2 v}{a},$$

welcher doppelt so gross ist, als der oben für A gefundene.

Man wird also in diesem Falle eine doppelt so grosse Tragkraft erzielen, wenn man den Anker so gestaltet, dass die Flächenanziehung ganz wegfällt und die Fernwirkungen allein in Wirksamkeit kommen.

Die Bedeutung der Fernwirkungen wird gegenüber jener der Flächenanziehung leicht unterschätzt. Es mag hier noch folgendes Beispiel angeführt werden. Setzt man in der obigen Formel für A' das Volumen $v = \frac{4\pi a^3}{3}$ und die Distanz $x = 2a$, so erhält man die Anziehung zwischen zwei gleich grossen Kugelmagneten, die sich in den Endpunkten ihrer Axen berühren. Diese Anziehung ist

$$A' = \frac{2}{3} \pi^2 a^2 \mu^2,$$

beträgt also $\frac{2}{3}$ der Kraft, mit welcher die zwei in der grössten Kreisfläche sich unmittelbar berührenden Hälften eines Kugelmagnetes sich anziehen.